

# BEITRÄGE ZUR THEORIE DER DREIDIMENSIONALEN GRENZSCHICHTEN

Von J. A. ZAAT

(Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam)

*Zusammenfassung*—Eine einfache Methode zur Berechnung der stationären dreidimensionalen kompressiblen Grenzschichten mit schwacher Querströmung wird gegeben. Dazu werden die Impulsleichungsmethode von Gruschwitz und die Integralbedingung von Wieghardt für die Energie zum Falle der dreidimensionalen kompressiblen Strömung erweitert.

Für die laminaren kompressiblen Grenzschichten werden nur die Impulsleichung für die Hauptströmung und die Impulsleichung für die Querströmung benutzt, welche sich auf eine Quadraturformel und auf eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zurückführen lassen. Es handelt sich hauptsächlich um Strömungen längs der wärmeisolierten Wand und mit der Prandtl'schen Zahl "Eins".

Einige Bemerkungen werden gemacht betreffs der Lösung der dreidimensionalen kompressiblen turbulenten Grenzschichten.

## 1. Einleitung\*

DIE Grenzschichtgleichungen für die dreidimensionalen Strömungen (nichtlineare partielle Differentialgleichungen in drei Variablen) sind dermassen kompliziert, dass man nur über sehr wenige exakte Lösungen verfügt. Als solche werden im Falle der inkompressiblen Strömung die ähnlichen Lösungen von Geis<sup>(1)</sup> und von Herzig und Hansen<sup>(2)</sup> erwähnt. Für die kompressible Strömung am Kegel existieren u.a. die Lösungen von Hantzsche und Wendt<sup>(3)</sup>, Mangler<sup>(4)</sup> und Moore<sup>(5)</sup>.

Weil an ein allgemeines exaktes Lösungsverfahren kaum zu denken ist, sind wir gezwungen Näherungsverfahren anzuwenden. Will man die Grenzschichtströmung um willkürliche Körper berechnen, dann ist es zweckmässig um das Integrationsverfahren von Truckenbrodt<sup>(6)</sup> zum dreidimensionalen Falle zu erweitern. Die integrierten Grenzschichtgleichungen gehen dabei über in zwei Systeme partieller Differentialgleichungen in zwei (Gaussischen-) Oberflächenkoordinaten. Es ist sinngemäss für die Oberflächenkoordinaten die Stromlinienkoordinaten der freien Ausenströmung zu wählen. Unter der Voraussetzung, dass innerhalb der Grenzschicht die Querströmung schwach ist im Vergleich zu der Haupt-

\* An der numerischen Ausarbeitung der Theorie hat sich Herr Th. E. Labrujere weitgehend beteiligt.

strömung, können die partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Die Lösung dieser Gleichungen ist von der Wahl der Geschwindigkeitsprofile abhängig.

Formal gelten diese Gleichungen auch für die turbulente Grenzschichtströmung. Für die Berechnung der inkompressiblen laminaren und turbulenten dreidimensionalen Grenzschichten haben Zaat<sup>(7)</sup> und Cooke<sup>(8)</sup> schon einfache Methoden entwickelt.

Für die kompressiblen Grenzschichtströmungen sind die Fälle mit und ohne Wärmeübertragung zu unterscheiden. Diese Arbeit handelt hauptsächlich von Strömungen längs der wärmeisolierten Wand mit einer Prandtl'schen Zahl "Eins". Die Temperatur und Zähigkeit werden durch das exponentielle Gesetz mit einander verknüpft.

Zur Beschreibung der kompressiblen laminaren Grenzschicht wird für die Hauptströmung eine Quadraturformel und für die Querströmung eine lineare Differentialgleichung hergeleitet.

Zur Lösung der dreidimensionalen kompressiblen turbulenten Grenzschicht werden einige Bemerkungen gemacht.

## 2. Die Grenzschichtgleichungen in Stromlinienkoordinaten

Als Ausgangspunkt für die Berechnung der kompressiblen stationären dreidimensionalen Grenzschichten wählen wir die Vektorgleichung von Navier-Stokes und die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \rho \vec{V} = 0. \quad (2.1)$$

Ist  $\delta$  die Grenzschichtdicke und beachtet man, dass für die Zähigkeit  $\mu$  gilt:  $\mu \sim \delta^2$ , dann lassen sich in der Gleichung von Navier-Stokes einige Zähigkeitsglieder der Ordnung  $0(\delta)$  vernachlässigen. Die Gleichung von Navier-Stokes wird dann

$$\rho \operatorname{rot} \vec{V} \times \vec{V} + \frac{1}{2} \rho \operatorname{grad} \vec{V}^2 = -\operatorname{grad} p - \operatorname{rot} (\mu \operatorname{rot} \vec{V}) \quad (2.2)$$

$\vec{V} = (u, v, w)$  ist der Geschwindigkeitsvector innerhalb der Grenzschicht,  $\rho$  ist die Dichte,  $p$  ist der Druck und  $\mu$  die Zähigkeit.

Die Gleichungen (2.1) und (2.2) lassen sich ohne weiteres auf jedes orthogonale Koordinatensystem transformieren.

Formal gelten die Gleichungen (2.1) und (2.2) nicht nur für die laminare, sondern auch für die turbulente Grenzschicht, für welche unter  $u, v, w, \rho$  und  $p$  die zeitlichen Mittelwerte, und unter  $\mu$  die effektive Zähigkeit  $\mu_{\text{eff}}$  zu verstehen sind. Die effektive Zähigkeit setzt sich aus der molekularen Zähigkeit  $\mu$  und der scheinbaren Zähigkeit  $\mu_s$  zusammen ( $\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_s$ ).

Für die Grenzschichtberechnungen führen wir ein System von orthogonalen krummlinigen Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  so ein, dass  $\xi$  und  $\eta$  die Gaussi-

schen Koordinaten auf der Oberfläche des umströmten Körpers sind, während  $\zeta$  die Richtung der Normale hat.

Wählen wir insbesondere auf der Oberfläche die Stromlinienkoordinaten, sodass  $\eta = \psi = \text{konstant}$  die Stromlinien der freien Aussenströmung, und  $\xi = \varphi = \text{konstant}$  die orthogonalen Trajektorien sind, dann vereinfachen sich die Geschwindigkeitskomponenten der freien Aussenströmung zu

$$u_\delta = U \quad \text{und} \quad v_\delta = 0 \tag{2.3}$$

Der Index  $\delta$  bezieht sich auf die freie Aussenströmung.

Wie üblich in der Grenzschichttheorie nehmen wir an, dass die Krümmungsradien der umströmten Oberfläche gross sind im Vergleich zu der Grenzschichtdicke  $\delta$ . Das Linienelement wird dann, weil  $h_3 = 1$  gesetzt werden darf,

$$ds^2 = h_1^2 d\xi^2 + h_2 d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{d\varphi^2}{\varrho_1 U^2} + \frac{d\psi^2}{\varrho_2 U^2} + d\zeta^2. \tag{2.4}$$

$\varrho_1$  und  $\varrho_2$  sind Grössen, worauf wir im Abschnitt 4 zurückkommen.

Falls ein Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  existiert, gilt

$$d\varphi = u_\delta h_1 d\xi + v_\delta h_2 d\eta = \sqrt{u_\delta^2 + v_\delta^2} ds_1 = U ds_1, \tag{2.5}$$

$\varrho_1$  ist in diesem Falle 1.

Die Grenzschichtgleichungen erhalten wir aus den Vektorgleichungen (2.1) und (2.2) durch Einführung der Transformationsformeln für die orthogonalen krummlinigen Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  und nachfolgende Anwendung der üblichen Grenzschichtvernachlässigungen ( $u, v, \xi, \eta, h_1, h_2$  sind von der Ordnung 1;  $w = 0(\delta), \zeta = 0(\delta), \mu = 0(\delta^2)$  und  $h_3 = 1$ ).

In Stromlinienkoordinaten sind  $\xi = \varphi, \eta = \psi$  und damit

$$h_1 = 1/\sqrt{\varrho_1} u_\delta = 1/\sqrt{\varrho_1} U, \quad h_2 = 1/\sqrt{\varrho_2} u_\delta = 1/\sqrt{\varrho_2} U \tag{2.6}$$

Setzen wir überdies voraus, dass innerhalb der Grenzschicht die Querströmung klein von der Ordnung  $\varepsilon$  ist bezüglich der Hauptströmung, welche von der Ordnung 1 ist ( $\varepsilon \ll 1$ ), und vernachlässigen wir in den Grenzschichtgleichungen alle Glieder, welche um eine Ordnung  $\varepsilon$  kleiner sind als die übrigen Glieder, dann resultieren die Grenzschichtgleichungen:

$$\varrho \left[ \frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right] = \frac{\varrho_\delta u_\delta}{h_1} \frac{\partial u_\delta}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \tag{2.7}$$

$$\varrho \left[ \frac{u}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_2 v)}{\partial \varphi} + w \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{u^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \psi} \right] = - \frac{\varrho_\delta u_\delta^2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (h_2 \varrho u) + h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\varrho w) = 0. \tag{2.9}$$

Die zugehörigen Randbedingungen sind:

$$\begin{aligned} u = v = w = 0 & \quad \text{für} \quad \zeta = 0 \\ u = u_\delta, \quad v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0 & \quad \text{für} \quad \zeta = \delta \end{aligned} \quad (2.10)$$

### 3. Die integrierten Grenzschichtgleichungen

Das von Truckenbrodt angegebene Integrationsverfahren, das angewandt wird auf zweidimensionale und rotationssymmetrische Grenzschichtströmungen, zur Erhaltung eines Systems unendlich vieler gewöhnlichen Differentialgleichungen, lässt sich auch zum dreidimensionalen Falle erweitern.

Addieren wir  $(n+1)u^n$ -Mal die Gleichung (2.7) zu  $u^{n+1}$ -Mal die Gleichung (2.9) und integrieren wir sodann über  $\zeta$  von 0 bis  $\delta$ , dann entsteht ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Grenzschichtströmung in der Richtung der Aussenstromlinien. Die ersten zwei Gleichungen für  $n = 0$  und  $n = 1$  sind:

$$\frac{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}{\varrho_\delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\varrho_\delta}{\sqrt{\varrho_2}} u_\delta \delta_2 \right) + \delta_1 \sqrt{\varrho_1} \frac{\partial u_\delta}{\partial \varphi} = \frac{\tau_{1w}}{\varrho_\delta u_\delta^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}{\varrho_\delta u_\delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\varrho_\delta}{\sqrt{\varrho_2}} u_\delta^2 \delta_3 \right) + 2\delta_4 \sqrt{\varrho_1} \frac{\partial u_\delta}{\partial \varphi} = \frac{2}{\varrho_\delta u_\delta^3} \int_0^\delta \tau_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta. \quad (3.2)$$

mit

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{\varrho u}{\varrho_\delta u_\delta} \right) d\zeta \quad \delta_3 = \int_0^\delta \frac{\varrho u}{\varrho_\delta u_\delta} \left( 1 - \frac{u^2}{u_\delta^2} \right) d\zeta \quad (3.3)$$

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{\varrho u}{\varrho_\delta u_\delta} \left( 1 - \frac{u}{u_\delta} \right) d\zeta \quad \delta_4 = \int_0^\delta \frac{u}{u_\delta} \left( 1 - \frac{\varrho}{\varrho_\delta} \right) d\zeta$$

$$\tau_1 = \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (3.4)$$

Addieren wir  $(n+1)(h_2 v)^n h_2$ -Mal die Gleichung (2.8) zu  $(h_2 v)^{n+1}$ -Mal die Gleichung (2.9) und integrieren wir sodann über  $\zeta$  von 0 bis  $\delta$ , dann entsteht ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Querströmung. Die ersten zwei Gleichungen ( $n = 0, 1$ ) sind hier

$$\sqrt{\varrho_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\varrho_\delta}{\varrho_2} \delta_5 \right) - \frac{\varrho_\delta}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2} u_\delta} \frac{\partial (\sqrt{\varrho_1} u \delta)}{\partial \varphi} \delta_6 = - \frac{\tau_{2w}}{\varrho_2 u_\delta^2} \quad (3.5)$$

$$\sqrt{\varrho_1} \left( \frac{\partial_\delta}{\varrho_2 \sqrt{\varrho_2}} \delta_7 \right) - \frac{2\varrho_\delta}{\varrho_2 \sqrt{\varrho_1} u_\delta} \frac{\partial (\sqrt{\varrho_1} u_\delta)}{\partial \varphi} \delta_8 = - \frac{2}{\varrho_2 \sqrt{\varrho_2} u_\delta^4} \int_0^\delta \tau_2 \frac{\partial v}{\partial \zeta} d\zeta \quad (3.6)$$

mit

$$\delta_5 = \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_8} \frac{u}{u_8} \frac{v}{u_8} d\zeta \quad \delta_7 = \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_8} \frac{u}{u_8} \left( \frac{v}{u_8} \right)^2 d\zeta \quad (3.7)$$

$$\delta_6 = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_8} \frac{u^2}{u_8^2} \right) d\zeta \quad \delta_8 = \int_0^{\delta} \frac{v}{u_8} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_8} \frac{u^2}{u_8^2} \right) d\zeta$$

$$\tau_2 = \mu \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad (3.8)$$

Die Gleichungen für  $n = 0$  und  $n = 1$  sind eine Erweiterung der aus der zweidimensionalen Theorie bekannten von Kármánschen Impulsgleichung und der Wieghardtschen Integralbedingungen für die Energie.

#### 4. Die Funktionen $\varrho_1$ und $\varrho_2$

Die Funktionen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  spielen in der Theorie eine wesentliche Rolle. Sie hängen nur von der freien Aussenströmung und der Geometrie der Oberfläche ab.

Geht man von einem beliebigen kartesischen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  aus und wählt man auf der umströmten Oberfläche eines Körpers  $z = z(x, y)$  zwei dieser Koordinaten— $x$  und  $y$ —als Oberflächenkoordinaten, während die dritte Koordinate  $\zeta$  die Richtung der Aussennormale hat, dann können die Funktionen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  mit Hilfe der Stetigkeitsbeziehungen

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta y \delta x}; \quad \frac{\delta^2 \psi}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 \psi}{\delta y \delta x} \quad (4.1)$$

berechnet werden. Das Symbol  $\frac{\delta}{\delta x}$  bedeutet:

$$\frac{\delta}{\delta x} = \frac{\partial}{\partial x} + z_x \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.2)$$

Ist die Strömung auf der Oberfläche durch die Geschwindigkeitskomponenten  $\bar{U}$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{W}$  in den  $x$ ,  $y$ ,  $z$ —Richtungen gegeben, dann gilt längs einer Stromlinie  $\psi = \text{konstant}$  mit dem Linienelement  $ds_1$

$$\frac{dx}{\bar{U}} = \frac{dy}{\bar{V}} = \frac{dz}{\bar{W}} = \frac{ds_1}{U} = \frac{d\varphi}{U^2 \sqrt{\varrho_1}}. \quad (4.3)$$

Für die Strömungsfläche  $z = z(x, y)$  folgt aus den Tangentialbeziehungen

$$\bar{W} = \bar{U} z_x + \bar{V} z_y. \quad (4.4)$$

Wegen der Orthogonalitätsbedingungen eines Linienelements  $ds_2$  der orthogonalen Trajektorien zu der Stromlinie  $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$  und zu der Flächennormale  $(z_x/\sqrt{g}, z_y/\sqrt{g}, -1/\sqrt{g})$  mit

$$g = 1 + z_x^2 + z_y^2 \quad (4.5)$$

gilt längs der orthogonalen Trajektorien der Stromlinien die Beziehung

$$\frac{\sqrt{g} dx}{\bar{V} + \bar{W}z_y} = \frac{-\sqrt{g} dy}{\bar{U} + \bar{W}z_x} = \frac{-\sqrt{g} dz}{\bar{U}z_x - \bar{V}z_y} = \frac{ds_2}{U} = \frac{d\psi}{U^2 \sqrt{\varrho_2}}. \quad (4.6)$$

Für  $\psi = \text{konstant}$  ist:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\delta}{\delta x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\delta}{\delta y},$$

sodass die Stromlinie entlang:

$$U^2 \sqrt{\varrho_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \bar{U} \frac{\delta}{\delta x} + \bar{V} \frac{\delta}{\delta y}. \quad (4.7)$$

Gleicherweise gilt die orthogonalen Trajektorien entlang

$$U^2 \sqrt{\varrho_2 g} \frac{\partial}{\partial \psi} = (\bar{V} + \bar{W}z_y) \frac{\delta}{\delta x} - (\bar{U} + \bar{W}z_x) \frac{\delta}{\delta y}. \quad (4.8)$$

Die Anwendung der Operatoren (4.7) und (4.8) auf die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  führt zu vier Gleichungen mit den Lösungen

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi}{\delta x} &= \sqrt{\varrho_1} (\bar{U} + \bar{W}z_x) & \frac{\delta \psi}{\delta x} &= \bar{V} \sqrt{\varrho_2 g} \\ \frac{\delta \varphi}{\delta y} &= \sqrt{\varrho_1} (\bar{V} + \bar{W}z_y) & \frac{\delta \psi}{\delta y} &= -\bar{U} \sqrt{\varrho_2 g} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen (4.1) erhält man hieraus die Differentialgleichungen zur Berechnung der Funktionen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ :

$$\frac{\delta}{\delta x} \{ \sqrt{\varrho_1} (\bar{V} + \bar{W}z_y) \} = \frac{\delta}{\delta y} \{ \sqrt{\varrho_1} (\bar{U} + \bar{W}z_x) \} \quad (4.10)$$

$$\frac{\delta}{\delta x} (\bar{U} \sqrt{\varrho_2 g}) + \frac{\delta}{\delta y} (\bar{V} \sqrt{\varrho_2 g}) = 0. \quad (4.11)$$

Die Differentialgleichungen (4.10) und (4.11) gelten sowohl für die kompressible als für die inkompressible Strömung. Sie sind meistens mühsam zu lösen. Nur in einigen Sonderfällen können die Lösungen sofort gegeben werden:

1 Existiert ein Strömungspotential, dann ist immer  $\varrho_1 = 1$ .

2 Betrachten wir die Strömung längs einer ebenen Platte mit parallelen Stromlinien, welche Funktionen von  $x$  sind

$$\bar{U} = 1, \quad \bar{V} = f(x), \quad z_x = z_y = 0, \quad (4.12)$$

dann gelten die Lösungen

$$\varrho_2 = 1 \quad \text{und} \quad \varrho_1 = 1/\bar{V}^2$$

3 Für den schräg angeströmten unendlich langen Zylinder mit der y-Achse parallel zu der Zylinderachse, erhält man die Lösungen:

$$\varrho_1 = 1, \quad \varrho_2 = 1/\bar{U}^2(1+z_x^2) \quad (4.13)$$

4 Für die axial symmetrische Potentialströmung um einen Rotationskörper  $z = \sqrt{r^2(x)-y^2}$  lauten die Lösungen:

$$p_1 = 1, \quad \varrho_2 = 1/r^2 U^2 \quad (4.14)$$

### 5. Das Dichteprofil und das Zähigkeitsprofil

Wird im Falle der kompressiblen Grenzschichtströmung eine wärmeundurchlässige Wand  $\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)_w = 0$  und die Prandtlsche Zahl  $Pr = 1$  vorausgesetzt, dann folgt aus der kinetischen Energiegleichung und der Wärmeenergiegleichung für zweidimensionale Grenzschichten die Relation

$$\frac{T}{T_\delta} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\delta^2 \left(1 - \frac{u^2}{u_\delta^2}\right). \quad (5.1)$$

Dieser Zusammenhang zwischen der Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilung kann ohne weiteres auf die dreidimensionale Grenzschichtströmung mit kleiner Querströmung angewandt werden. Unter der Voraussetzung, dass innerhalb der Grenzschicht  $\frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0$  ist, gilt durch die Grenzschicht hindurch die Beziehung

$$\varrho/\varrho_\delta = T_\delta/T = (1-m^2) / \left[1 - m^2 \left(\frac{u}{u_\delta}\right)^2\right] \quad (5.2)$$

Für Luft ( $\gamma = 1.4$ ) ist

$$m^2 = \frac{1}{6} M_\delta^{*2} = M_\delta^2 / (M_\delta^2 + 5) \quad (5.3)$$

$M_\delta^* = u_\delta/a^*$  ist die kritische Machsche Zahl

$M_\delta = u_\delta/a$  ist die örtliche Machsche Zahl.

Im Falle der wärmedurchlässigen Wand  $\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)_w \neq 0$  und einer Prandtlschen Zahl, welche gleich eins ist, oder nur wenig von eins verschieden ist, darf die Beziehung

$$\varrho_\delta/\varrho = T/T_\delta = 1 + C_T \left(\frac{u}{u_\delta} - 1\right) + r \frac{\gamma-1}{2} M_\delta^2 \left(1 - \frac{u^2}{u_\delta^2}\right) \quad (5.4)$$

angewandt werden, welche den Arbeiten von Van Driest<sup>(9)</sup> entnommen ist.  $C_T$  ist die Wärmeübergangszahl,  $r$  ist der recovery-Faktor. Es gilt

$$C_T = (T_r - T_w)/T_\delta, \quad T_r/T_\delta = 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \quad (5.5)$$

$$r = (T_r - T_\delta)/(T_0 - T_\delta), \quad T_0/T_\delta = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\delta^2 \quad (5.6)$$

$T_r$  ist die recovery-Temperatur, d. h. es ist die Temperatur, welche die wärmeisolierte Wand annimmt.  $T_0$  ist die Ruhetemperatur,  $T_w$  ist die Wandtemperatur.

Für Luft mit  $Pr \approx 0.72$  bei laminarer,  $Pr \approx 0.86$  bei turbulenter Grenzschicht, gilt die Gleichung (5.4) noch mit guter Annäherung.

*Das Zähigkeitsprofil.* Bei der laminaren Grenzschicht kann die molekulare Zähigkeit durch das einfache Potenzgesetz

$$\mu = \mu_\delta \left( \frac{T}{T_\delta} \right)^\omega, \quad \text{mit } \omega = \frac{3}{2} - \frac{1}{1 + C/T_0} \quad (5.7)$$

gut angenähert werden. Die konstante  $C$  hat für Luft den Wert  $113^\circ\text{K}$ . Für sehr hohe Temperaturen ist  $\omega \approx 0.5$ , für sehr niedrige Temperaturen ist  $\omega \approx 1.5$ ; für  $0^\circ\text{C}$  ist  $\omega \approx 0.8$ .

## 6. Die laminaren Grenzschichten

6.1 *Die Geschwindigkeitsprofile*—Für die Durchführung der Grenzschichtberechnungen werden die Geschwindigkeitsprofile  $u$  und  $v$  innerhalb der Grenzschicht, in der Richtung der Stromlinien der freien Aussenströmung und senkrecht darauf, vorgeschrieben. Diese Profile werden so gewählt, dass sowohl das asymptotische Verhalten am Aussenrande der Grenzschicht, als auch eine bestimmte Anzahl von Randbedingungen an der Wand—folgend aus den Grenzschichtgleichungen (2.7)/(2.9) durch wiederholte Differentiation nach  $\zeta$ —exakt erfüllt werden. Wir benutzen die Profile:

$$u_1 = \frac{u}{u_\delta} = f(\bar{\zeta}) - Ag(\bar{\zeta}) - Nh(\bar{\zeta}) + P\bar{\zeta}e^{-\bar{\zeta}^2} \quad (6.1)$$

$$u_2 = \frac{v}{u_\delta} = -Kg(\bar{\zeta}) + Lh(\bar{\zeta}) + Q\bar{\zeta}e^{-\bar{\zeta}^2} \quad (6.2)$$

mit

$$1 - f(\bar{\zeta}) = 2g(\bar{\zeta}) + e^{-\bar{\zeta}^2} = 2h(\bar{\zeta}) + (1 + \bar{\zeta}^2)e^{-\bar{\zeta}^2} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \bar{\zeta}e^{-\bar{\zeta}^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\bar{\zeta}}^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (6.3)$$

und

$$\bar{\zeta} = \zeta \sqrt{\frac{\mu_w \sigma}{\rho \delta}} = \frac{\zeta}{l} \sqrt{Re/\sigma}. \quad (6.4)$$

Die Funktionen  $f$ ,  $g$ ,  $h$  und  $k = \bar{\zeta} e^{-\bar{\zeta}^2}$  sind im Bild 1 dargestellt.

Für  $\bar{\zeta} = 0$  sind die Randbedingungen

$$f = g = h = f'' = h'' = f''' = g''' = h''' = f^{IV} = 0$$

$$\frac{1}{2}f' = -g' = -h' = 2/3\sqrt{\pi}$$

$$g'' = 1, \quad g^{IV} = -h^{IV} = 6$$

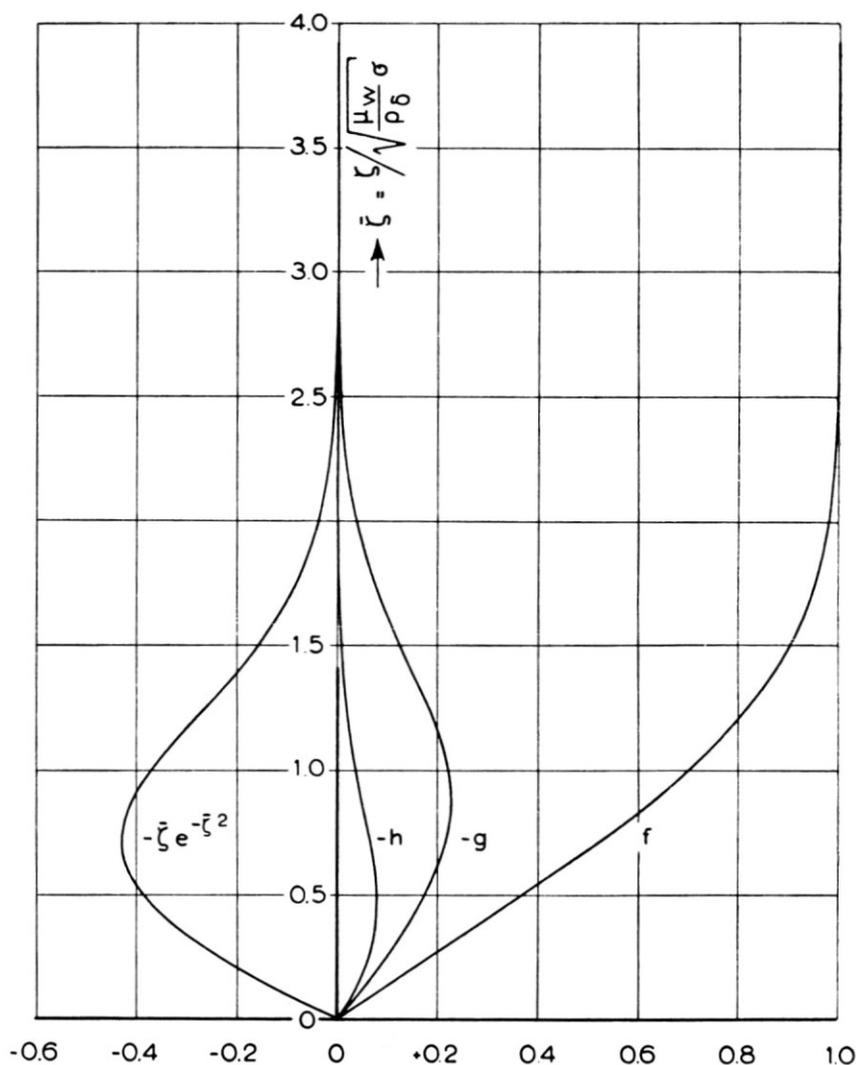


ABB. 1. Die Funktionen  $f$ ,  $g$ ,  $h$  und  $\bar{\zeta} e^{-\bar{\zeta}^2}$  der Grenzschichtprofile.

$\sqrt{\sigma \frac{\mu_w}{\varrho \delta}}$  ist ein Mass für die Grenzschichtdicke. Es hat die Dimension einer Länge,  $\bar{\sigma}$  ist eine dimensionslose Grösse. Betrachten wir den Fall  $\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta}\right)_w = 0$  und  $Pr = 1$ , dann gilt:

$$A = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\varrho_1} \frac{\partial u_8^2}{\partial \varphi} \quad K = \frac{\sigma}{2} \frac{\sqrt{\varrho^2}}{\varrho_1} \frac{\partial(\varrho_1 u_8^2)}{\partial \psi} \quad (6.6)$$

$$P = -\frac{\omega m^2}{3} \left[ \frac{2}{3\sqrt{\pi}} (2 + A + N) + P \right]^3 \quad (6.7)$$

$$Q(2 + A + N) = (K - L)P. \quad (6.8)$$

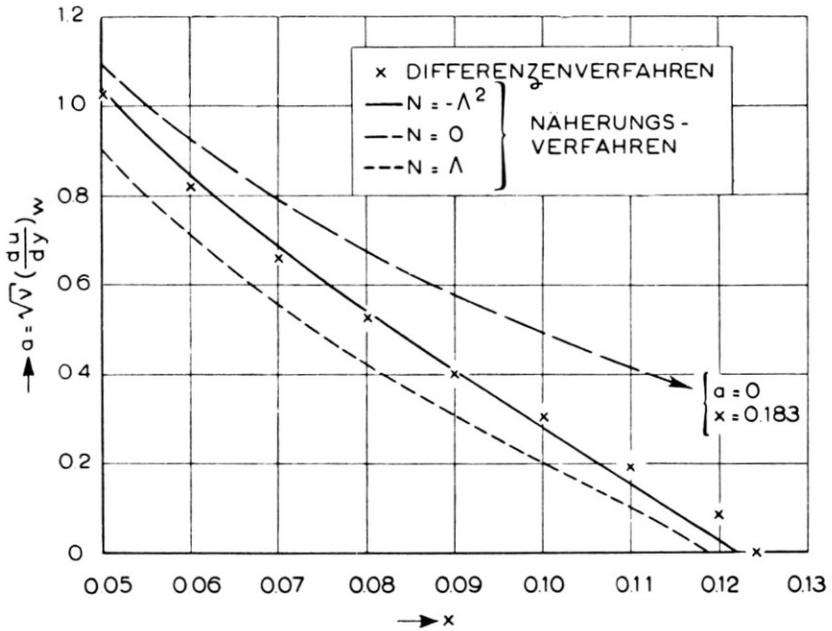


ABB. 2. Grenzschicht bei der äusseren Geschwindigkeitsverteilung  $U = 1 - x$ .

Für die zweidimensionale Strömung gilt in dem laminaren Ablösungspunkt

$$N = A = -1 \text{ wegen } \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta}\right)_w = \left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial \zeta^4}\right)_w = 0.$$

Werden für die beschleunigte Strömung nur die ersten vier Randbedingungen berücksichtigt, dann ist dort die Lösung

$$N = 0 \quad \text{für} \quad A > 0$$

zu nehmen. Für die verzögerte Strömung wird wegen des erreichbaren Wertes  $N = A = -1$ , und an Hand von einem Vergleich mit einer exakten Lösung (siehe Abb. 2) die Beziehung

$$N = -A^2 \quad \text{für} \quad A < 0$$

genommen.

6.2 *Weitere Vereinfachungen der Impulsgleichungen*—Für die Berechnung der dreidimensionalen kompressiblen laminaren Grenzschichten wenden wir nur die beiden Impulsgleichungen (3.1) und (3.5) an, und schreiben sie in der Gestalt:

$$\frac{\varrho_2 \sqrt{\varrho_1}}{2\varrho_8^2 u_8 \delta_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\varrho_8^2}{\varrho_2} u_8^2 \delta_2^2 \right) + \delta_1 \sqrt{\varrho_1} \frac{\partial u_8}{\partial \varphi} = \frac{\mu_w}{\varrho_8 u_8^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)_w$$

$$\sqrt{\varrho_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\varrho_8}{\varrho_2} \delta_5 \right) - \frac{\varrho_8}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2} u_8} \frac{\partial (\sqrt{\varrho_1} u_8)}{\partial \psi} (\delta_1 + \delta_2) = - \frac{\mu_w}{\varrho_2 u_8^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right)_w.$$

Werden die im Abschnitt 6.1 gegebenen Geschwindigkeitsprofile benutzt, und die dimensionslosen Größen:

$$A_1 = \int_0^\infty \left( 1 - \frac{\varrho}{\varrho_8} \frac{u}{u_8} \right) d\bar{\zeta} = \delta_1 / \sqrt{\sigma \frac{\mu_w}{\varrho_8}}$$

$$\theta_{11} = \int_0^\infty \frac{\varrho}{\varrho_8} \frac{u}{u_8} \left( 1 - \frac{u}{u_8} \right) d\bar{\zeta} = \delta_5 / \sqrt{\sigma \frac{\mu_w}{\varrho_8}}$$

$$\theta_{21} = \int_0^\infty \frac{\varrho}{\varrho_8} \frac{u}{u_8} \frac{v}{u_8} d\bar{\zeta} = \delta_5 / \sqrt{\sigma \frac{\mu_w}{\varrho_8}}$$

$$= \alpha(A, m^2)(K-L) + \beta(A, m^2)K$$

eingesetzt, dann gehen die beiden Impulsgleichungen über in

$$\frac{\varrho_2 \sqrt{\varrho_1}}{\varrho_8} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\varrho_8}{\varrho_2} \sigma u_8^2 \theta_{11}^2 \right) = 2\theta_{11} \left[ \frac{2}{3\sqrt{\pi}} (2+A+N) + P - AA_1 \right] = H(A, m^2) \tag{6.9}$$

$$\frac{\varrho_2 u_8^2 \sqrt{\varrho_1 \sigma}}{\sqrt{\varrho_8}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\sqrt{\varrho_8}}{\varrho_2} \sqrt{\sigma} \theta_{21} \right) = (A_1 + \theta_{11}) K - \left( \frac{2}{3\sqrt{\pi}} + \frac{P}{2+A+N} \right) (K-L)$$

$$= -A(A, m^2)\theta_{21} + B(A, m^2)K. \tag{6.10}$$

Innerhalb des Intervalls  $+1 \geq A \geq -1$ , das alle vorgesehenen Werte von  $A$  enthält, lassen sich die Funktionen  $A, B, \alpha, \beta, \theta_{11}, A_1$  und  $H/\theta_{11}^2$ , für verschiedene Werte von  $\omega$ , durch einfache analytische Formeln von der Gestalt

$$a(m^2) + b(m^2)A + c(m^2)A^2$$

mit ausreichender Genauigkeit, annähern; siehe Lit.<sup>(10)</sup>. Die Koeffizienten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und auch alle übrigen Koeffizienten in diesem Abschnitt sind mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadraten bestimmt worden. Sie sind in Lit.<sup>(10)</sup> als Funktionen von  $m^2$  für  $\omega = 0.50; 0.75; 1.00; 1.25; 1.50$  dargestellt. Dabei ist für  $\Lambda \geq 0$  stets  $c(m^2) = 0$  zu nehmen.  $\omega$  ist der

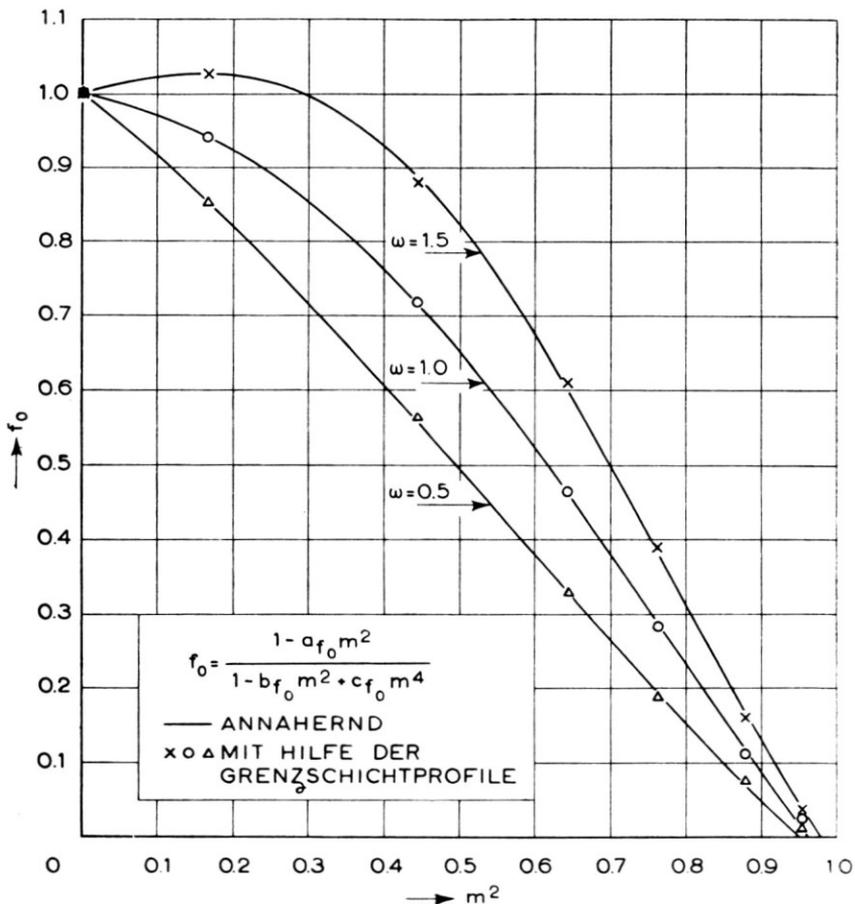


ABB. 3. Die Funktionen  $f_0(m^2, \omega)$  für die Hauptströmung.  $m^2 = 1/6 M^{*2}$ .

Exponent des Potenzgesetzes (5.7), und ist nur eine Funktion der ungestörten Strömungsgrößen  $M_\infty$  und  $T_\infty$ .  $\omega$  ist also während der Grenzschichtberechnung als eine Konstante zu betrachten. Nach Einführung von  $H/\theta_{11}^2 = a_H + b_H \Lambda$  und Substitution von  $\Lambda = \sigma \sqrt{\varrho_1} u_\delta \frac{\partial u_\delta}{\partial \varphi}$  schreibt sich die erste Impulsgleichung (6.9), nach kurzer Umformung, als

$$\sigma u_\delta^2 \sqrt{\varrho_1} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \left( \frac{\varrho_\delta}{\varrho_2} \sigma u_\delta^2 \theta_{11}^2 \right) - b_H \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln u_\delta \right] = a_H.$$

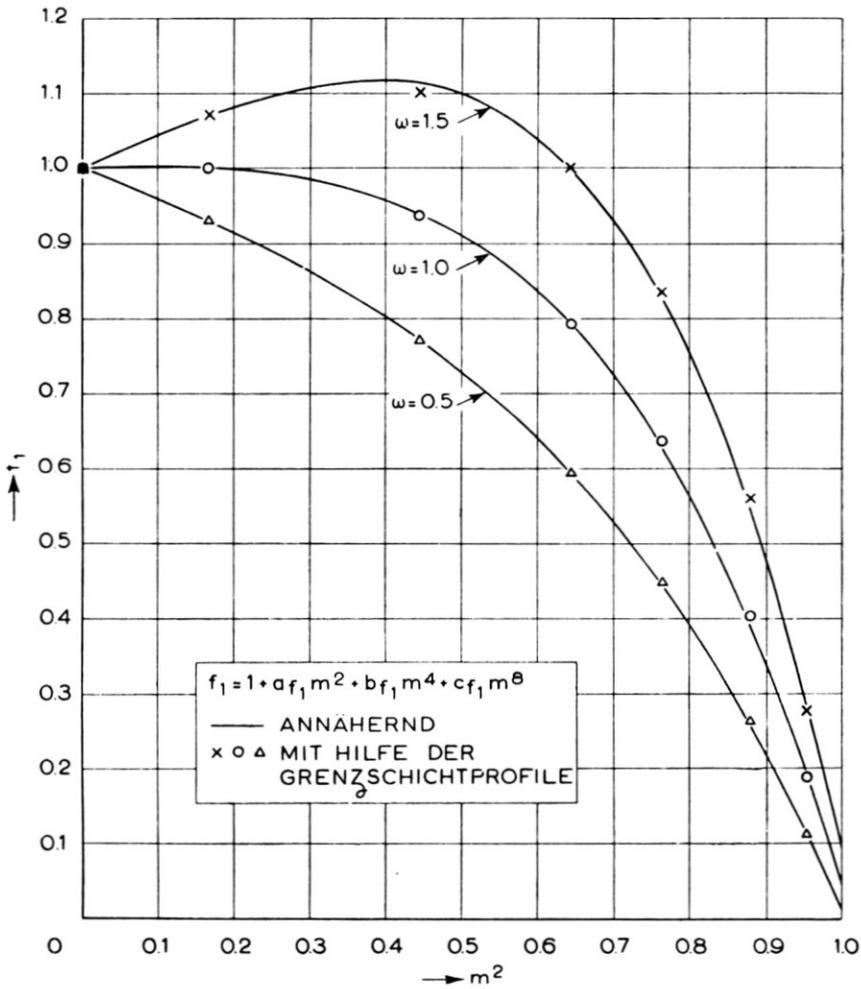


ABB. 4. Die Funktionen  $f_1(m^2, w)$  für die Hauptströmung.  $m^2 = 1/6 M^{*2}$ .

Für  $b_H$  wird nun die Annäherung

$$-(1-m^2)b_H/b_H(0) = 1 + p(\omega)m^2 + q(\omega) \frac{m^2(1-m^2)}{1-r(\omega)m^2}$$

eingeführt, während bei adiabatischen Zustandsänderungen für Luft die Gleichung von Poisson  $\varrho_8 = C(1-m^2)^{2.5}$  gilt.

Damit geht die erste Impulsgleichung über in

$$\sqrt{\varrho_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\sigma}{\varrho_2} u_8^{4.11} f_0(m^2, \omega) \right\} = 5.08 \frac{u_8^{2.11}}{\varrho_2} f(m^2, \omega). \quad (6.11)$$

Die Funktionen  $f_0$  und  $f_1$  sind in den Abb. 3 und 4 gegeben. Sie können analytisch mit hinreichender Genauigkeit durch

$$f_0 = \frac{1 - a_{f_0} m^2}{1 - b_{f_0} m^2 + c_{f_0} m^4}; \quad f_1 = 1 + a_{f_1} m^2 + b_{f_1} m^4 + c_{f_1} m^8 \quad (6.12)$$

angenähert werden. In der Abbildung 5 sind die Koeffizienten  $a_{f_0}$  bis  $c_{f_1}$  als Funktionen von  $\omega$  dargestellt.

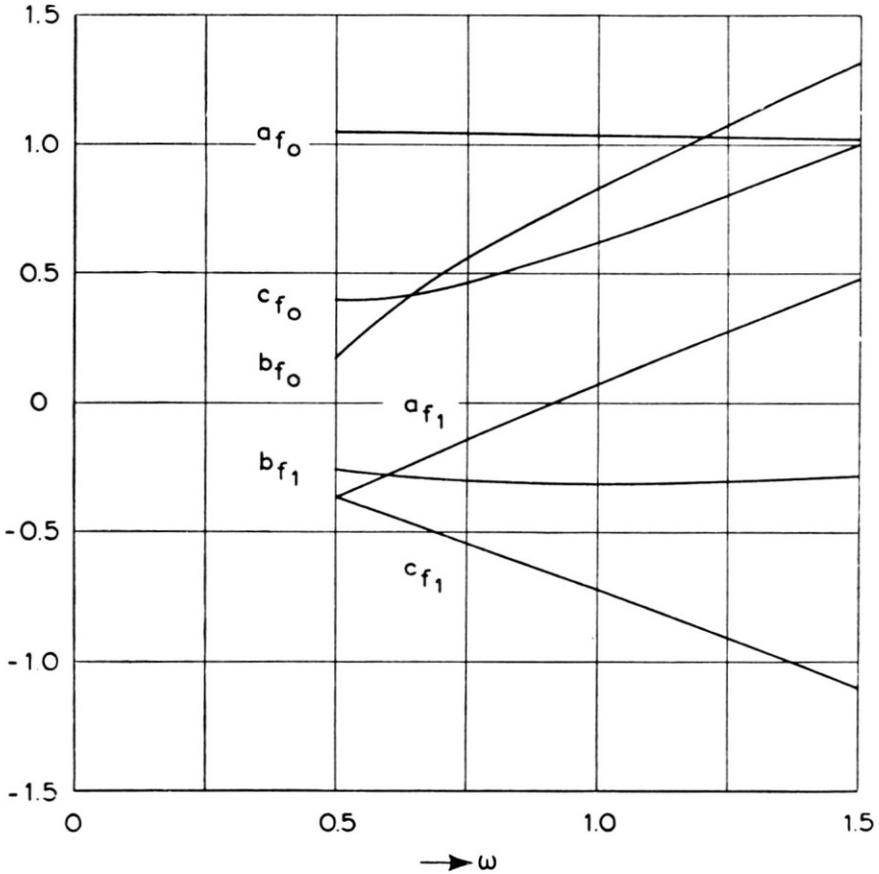


ABB. 5. Die Koeffizienten der Funktionen  $f_0(m^2, \omega)$  und  $f_1(m^2, \omega)$ .

Nach Integration geht die Gleichung (6.11) über in die Quadratur

$$\sigma = \frac{5,08 \varrho_2}{u_8^{4,11} f_0(m^2, \omega)} \left\{ C_0(\varphi_0) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{u_8^{2,11}}{\varrho_2 \sqrt{\varrho_1}} f_1(m_1^2, \omega) d\varphi \right\}. \quad (6.13)$$

Die Gleichung für die Querströmung ist eine lineare Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten. Sie lässt sich schreiben als

$$\frac{dQ}{d\varphi} + DQ + E = 0 \quad (6.14)$$

mit

$$Q = (1-m^2)^{1.25} \frac{\sqrt{\sigma}}{\varrho_2} \theta_{21} = (1-m^2)^{1.25} \frac{\sqrt{\sigma}}{\varrho_2} [\alpha(K-L) + \beta K] \quad (6.15)$$

$$D = A(\Lambda, m^2) / \sigma u_8^2 \sqrt{\varrho_1}; \quad E = -(1-m^2)^{1.25} B(\Lambda, m^2) K / \varrho_2 u_8^2 \sqrt{\varrho_1 \sigma}. \quad (6.16)$$

Die Funktionen  $\alpha, \beta, A, B, \Lambda_1$  und  $\theta_{11}$ , welche von der Gestalt  $a+b\Lambda+c\Lambda^2$  sind, hängen nur sehr wenig von dem Wert  $\omega$  ab. Die Koeffizienten  $a, b, c$  sind mit hinreichender Genauigkeit durch Formeln der Gestalt

$$(p+qm^2+rm^4)/(1-sm^2) \quad (6.17)$$

anzunähern; siehe Lit.<sup>(10)</sup>. Die konstanten Werte  $p, q, r$  und  $s$  sind in Tab. I gegeben. Nachdem die Funktion  $Q$  mit Hilfe der Diffgl. (6.14) gelöst ist, lassen sich die Werte  $L$  mittels der Gleichung (6.15) berechnen.

### 7. Die turbulente Grenzschicht

Das im Abschnitt 3 hergeleitete System von vier gewöhnlichen Differentialgleichungen kann als Ausgangspunkt für die Berechnung der dreidimensionalen kompressiblen turbulenten Grenzschicht mit schwacher Querströmung gewählt werden. Wie bei den laminaren Grenzschichtströmungen braucht die freie Aussenströmung auch in diesem Falle keine Potentialströmung zu sein.

Zur Lösung der Grenzschichtgleichungen führen wir zweiparametrische Geschwindigkeitsprofile ein, und zwar:

In der Richtung der Stromlinien der freien Aussenströmung:

$$\frac{u}{u_8} = \left[ 1 + k \left( 1 - \frac{\zeta}{\delta} \right) \right] \left( \frac{\zeta}{\delta} \right)^k \quad (7.1)$$

In der Richtung der orthogonalen Trajektorien:

$$\frac{v}{u_8} = \lambda \frac{u}{u_8} = (\operatorname{tg} \chi) \frac{u}{u_8} = \left( a + b \frac{\zeta}{\delta} \right) \left( 1 - \frac{\zeta}{\delta} \right)^2 \frac{u}{u_8} \quad (7.2)$$

$u$  und  $v$  sind die zeitlich gemittelten Geschwindigkeitskomponenten innerhalb der Grenzschicht.  $\chi$  ist der Winkel, der die Stromlinie innerhalb der Grenzschicht mit der Stromlinie der freien Aussenströmung bildet. Für  $\zeta = 0$  ist  $\lambda_w = \operatorname{tg} \chi_w = a$ . Das Verhältnis  $v/u$  lässt sich, in Uebereinstimmung mit den Messungen von Wallace<sup>(11)</sup> an einem Pfeilflügel, als eine algebraische Gleichung der Gestalt  $\left( a + b \frac{\zeta}{\delta} \right) \left( 1 - \frac{\zeta}{\delta} \right)^2$  schreiben, deren Koeffizienten mit Hilfe der Differentialgleichungen (3.5) und (3.6) bestimmt werden können. Die Geschwindigkeitsprofile  $u$  und  $v$  sind so gewählt, dass sie die vorgeschriebenen Randbedingungen (2.10) befriedigen.

Cooke<sup>(8)</sup> wählt in seiner Arbeit über die inkompressible turbulente Grenzschichtströmung das Querstromprofil  $v/u = \lambda \left(1 - \frac{\zeta}{\delta}\right)^2$ , das weniger biegsam ist. Für das Dichteprofil kommt für den Fall  $\left(\frac{dT}{d\zeta}\right)_w = 0$  und  $Pr = 1$  die Formel (5.2) in Betracht.

Für die Beschreibung der Schubspannung an der Wand und der Dissipation, sollen empirische Gesetze benutzt werden. Diese Gesetze sind ursprünglich für die inkompressible turbulente Grenzschicht ohne Sekundärströmung abgeleitet. Walz<sup>(12)</sup> hat sie in einer derartigen Form transformiert, dass sie auch für die kompressible zweidimensionale Strömung brauchbar sind. Es sind:

1. Das Wandschubspannungsgesetz von Ludwig und Tillmann

$$\tau_w / \rho_\delta u_\delta^2 = (\tau_w / \rho_\delta u_\delta^2)_i \frac{\delta_2}{(\delta^2)_i} = \alpha(H) Re^{-0.268} \delta_2 / (\delta_2)_i \quad (7.3)$$

mit

$$\alpha(H) \approx 0.123 \cdot 10^{-0.678} (\delta_1 / \delta_2)_i \quad (7.4)$$

$$Re = \rho_\delta u_\delta \delta_2 / \mu_w \quad (7.5)$$

2. Das Dissipationsgesetz von Rotta und Truckenbrodt:

$$D / \rho_\delta u_\delta^3 = \frac{1}{\rho_\delta u_\delta^3} \int_0^{u_\delta} \tau \, du = 0.0052 Re^{-0.168} (\tau_w / \rho_\delta u_\delta^2)_i \delta_2 / (\delta_2)_i. \quad (7.6)$$

Für die dreidimensionale kompressible Strömung liegt es nahe diese zwei Gesetze in der Richtung der Stromlinien an der Wand anzuwenden.

Zweckmässig wäre es um statt  $u_\delta$  auch eine effektive Geschwindigkeit  $u_\lambda = u_\delta / \cos \chi_w = u_\delta \sqrt{1+a^2}$  in die Richtung der Wandstromlinien zu wählen (vgl. Lit. (13)).

Mit dieser Annahme wird:

$$\tau_w / \rho_\delta u_\delta^2 = \alpha(H) Re^{-0.268} (\cos \chi_w)^{-1.732} \delta_2 / (\delta_2)_i \quad (7.8)$$

$$D / \rho_\delta u_\delta^3 = 0.0052 Re^{-0.168} (\cos \chi_w)^{0.168} (\tau_w / \rho_\delta u_\delta^2)_i \delta_2 / (\delta_2)_i. \quad (7.9)$$

Weil die Richtung an der Wand ist gegeben durch  $(v/u)_w = a$ , sind die Komponenten der Wandschubspannung in der Richtung der freien Ausströmung und senkrecht darauf:

$$\tau_{1w} = \tau_w / \sqrt{1+a^2} \quad \tau_{2w} = a \tau_w / \sqrt{1+a^2}.$$

Damit gilt:

$$\tau_{1w} / \rho_\delta u_\delta^2 = \alpha(H) Re^{-0.268} (1+a^2)^{0.366} \delta_2 / (\delta_2)_i \quad (7.10)$$

$$\tau_{2w} / \rho_\delta u_\delta^2 = \alpha(H) Re^{-0.268} a (1+a^2)^{0.336} \delta_2 / (\delta_2)_i. \quad (7.11)$$

Formal lassen sich aus der Gleichung (7.9) mit Hilfe der Beziehungen (7.10) und (7.11) auch die für die Berechnungen benötigten Dissipationsformeln bilden.

Es bleibt natürlich eine offene Frage, wie das Schubspannungsgesetz und die Dissipationsfunktion beim Vorhandensein einer Sekundärströmung abzuändern sind. Die Möglichkeit existiert, dass der turbulente Austausch durch die Anwesenheit einer verhältnismässig schwachen Querströmung schon beträchtlich geändert wird. Das Experiment soll am Ende entscheiden müssen in wie weit die Schubspannungsformeln und die Dissipationsformeln sich unter dem Einfluss der Querströmung und der Kompressibilität ändern.

Auch für die dreidimensionale kompressible turbulente Grenzschichtströmung kann eine einfache Berechnungsmethode entwickelt werden. Benutzen wir die in vorhergehenden hergeleiteten Formeln für die Schubspannung und für die Dissipation, dann liegt es nahe um ein Iterationsverfahren, ausgehend von dem Parameterwert  $a = 0$  für die Hauptströmung, anzuwenden. Nachdem der Parameter  $a$  mit Hilfe der Gleichungen für die Querströmung bestimmt ist, können die Lösungen der Gleichungen der Hauptströmung, nach Einsetzung des Parameterwertes  $a$ , wieder verbessert werden. Diese Iteration wird beendet, sobald die vorgeschriebene Genauigkeit erreicht ist.

#### LITERATUR

1. GEIS, T., Ähnliche dreidimensionale Grenzschichten. *Journ. Rational Mech. Anal.* Vol. 5, No. 4, 1956.
2. HANSEN, A. G. and HERZIG, H. Z., Cross flows in laminar incompressible boundary layers. NACA T. N. 3651 (1956) Experimental and analytical investigation of secondary flows in ducts. *J. Aeron. Sci.*, Vol. 24, S. 217-231, March, 1957.
3. HANTSCHKE, W. und WENDT, H., Die laminare Grenzschicht an einem mit Ueberschallgeschwindigkeit angeströmten nicht angestellten Kreiskegel. *Jahrb. d. dt. Luftfahrtforschung*, I. S. 76, 1941.
4. MANGLER, W., Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten. *ZAMM*, Vol. 28, S. 97, 1948.
5. MOORE, F. K., Laminar boundary layer, on a circular cone in supersonic flow at a small angle of attack. NACA T. N. 2521, Oct. 1951.
6. TRUCKENBRODT, E., Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Grenzschicht bei ebener und rotations-symmetrischer Strömung. *Ing. Arch.* 20 (1952). NACA T. M. 1379, 1955.
7. ZAAT, J. A., A simplified method for the calculation of three-dimensional laminar boundary layers. *NLL-Report F. 184*, 1956.
8. COOKE, J. C., A calculation method for three-dimensional turbulent boundary layers. *R.A.E. T.N. Aero 2576*, Oct. 1958.
9. VAN DRIEST, E. R., On the boundary layer with variable Prandtl number. *Jahrb. d. W. G. L.*, S. 66, 1954.

10. ZAAT, J. A., A simplified method for the calculation of three-dimensional compressible boundary layers without heat-transfer at the wall and with a Prandtl-number 1. NLL-Bericht. (Der Bericht erscheint in kurzem).
11. WALLACE, R. E., The experimental investigation of a sweptwing research model boundary layer. Aerodynamic Report No 092 of the Municipal University of Wichita, 1953.
12. WALZ, A., Nouvelle méthode approchée de calcul des couches limites laminaire et turbulente en écoulement compressible. Publ. Scient. Techn. Min. de l'Air. No.309 (1956) und No. 336 (1957).
13. BECKER, E., Berechnung von Reibungsschichten mit schwacher Sekundärströmung nach dem Impulsverfahren. Z. Flugw., Heft 6, 1959, S. 163.

TABELLE I

Die Koeffizienten  $p$ ,  $q$ ,  $r$  und  $s$  zur Berechnung der Querströmung, der Verdünnungsdicke  $\Delta_1$  und der Impulsverlustdicke  $\Theta_{11}$ .

	p	q	r	s
$a_\alpha$	+0.1876	-0.2490	+0.0632	+0.7814
$b_\alpha$	+0.0111	-0.0384	+0.0248	+0.0596
$c_\alpha$	-0.0477	+0.0281	+0.0174	+0.7744
$a_\beta$	-0.1578	+0.1879	-0.0323	+0.7622
$b_\beta$	-0.0073	+0.0190	-0.0115	+0.8165
$c_\beta$	+0.0367	-0.0175	-0.0178	+0.8433
$a_A$	+2.0039	-1.0360	-0.3646	+0.9854
$b_A$	-0.1118	+0.0923	+0.0348	+1.0103
$c_A$	+0.6740	+0.1535	-0.2657	+0.9936
$a_B$	+0.7259	-0.2871	-0.2358	+0.8940
$b_B$	-0.0596	+0.1563	-0.0324	+0.0000
$c_B$	+0.3121	+0.4103	-0.0439	-0.8646
$a_{\Delta}$	+0.7523	-0.1125	-0.3627	+0.8756
$b_{\Delta}$	-0.0670	+0.1150	-0.0000	+0.0000
$c_{\Delta}$	+0.2885	+0.1246	-0.0383	+0.0000
$a_\theta$	+0.2948	-0.3566	+0.0645	+0.6143

$$a_\alpha; b_\alpha; \dots; c_\Delta; a_\theta = (p + qm^2 + rm^4)/(1 - sm^2),$$

mit  $m^2 = \frac{1}{6} M_\delta^{*2} = M_\delta^2 / (M_\delta^2 + 5)$  sind die Koeffizienten der Funktionen

$$F = a_F + b_F A + c_F A^2, \text{ wo}$$

$$F = \alpha; \beta; A; B; \Delta_1; \Theta_{11} \cdot c_F(m^2) = 0 \text{ für } A \geq 0.$$